UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Preliminar de Doutorado - Prova de Geometria.
Curso: Doutorado em Matemática.
Data: 04/04/2022 - Horário: 14:00h-18:00h.
ALUNO(A):____

Faça os problemas a seguir, justificando todas as suas afirmações e explicitando os teoremas e propriedades que utilizar.

1. Calcule todas as geodésicas do cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, munido com a métrica produto.

2. Seja D o toro, em $\mathbb{R}^3$, obtido pela rotação do círculo $(y-2)^2 + z^2 = 1$ em torno do eixo z e munido com a métrica riemanniana induzida e com orientação determinada pela normal unitária exterior. Calcule:
   (a) a área da superfície D;
   (b) a integral sobre D da função $f(x, y, z) = z^2 + 1$;
   (c) a integral sobre D da 2-forma $\omega = zdx \wedge dy$.

3. T é um conjunto fechado, estrelado e não vazio em $\mathbb{R}^3$. Calcule a cohomologia de de Rham de $\mathbb{R}^3 \setminus T$.

4. Seja $E_3 = (0, 0, 1)$, campo canônico de vetores em $\mathbb{R}^3$. Defina um campo de vetores X na esfera $\mathbb{S}^2$ da seguinte forma: para cada $p \in \mathbb{S}_2$, pomos $X(p)$ como a projeção ortogonal de $E_3(p)$ sobre $T_p\mathbb{S}^2$. Calcule $\operatorname{div} X$.

5. Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ variedades riemannianas orientadas, $\iota : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e N um campo normal unitário ao longo de M. Suponha que existe um campo de Killing Z em $\overline{M}$, tal que $N = Z_{|M}$. Prove que ι é totalmente geodésica. (Recorde que Z ser campo de Killing significa que $\mathcal{L}_Z\overline{g} = 0$.)