UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova de Seleção para PGMAT/UFC – Mestrado – 2022.1

Questão 1. Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números inteiros. Mostre que se $X \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq n$ para todo $n \in X$, então X possui um elemento mínimo.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no conjunto dos números reais positivos e que satisfaz $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \cdot \log x$.

Questão 3. Considere $\alpha > 0$ e uma seqüência (x_n) de números reais tais que $x_1 \neq 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mostre que (x_n) converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

Questão 4. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, a é o limite de uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos.

Questão 5. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e diferenciáveis em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Questão 6.

(a) Se $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$, determine $F''(2)$.

(b) Prove que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Questão 7. Sejam $f \in C^2([a, b])$ uma função real de classe C^2 em $[a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$. Dados quaisquer $x \in (a, b)$ e $m \geq 1$, mostre que podemos encontrar $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (1 - \theta)^{2-m}}{2m} \cdot (x - x_0)^2.$$

Questão 8. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa e limitada deve ser necessariamente uma função constante.