UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova de Seleção para PGMAT/UFC – Mestrado – 2022.1

Questão 1. Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números inteiros. Mostre que se $X \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq n$ para todo $n \in X$, então X possui um elemento mínimo.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no conjunto dos números reais positivos e que satisfaz $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \cdot \log x$.

Questão 3. Considere $\alpha > 0$ e uma seqüência (x_n) de números reais tais que $x_1 \neq 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mostre que (x_n) converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

Questão 4. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, a é o limite de uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos.

Questão 5. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e diferenciáveis em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Questão 6.

(a) Se $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$, determine $F''(2)$.

(b) Prove que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Questão 7. Sejam $f \in C^2([a, b])$ uma função real de classe C^2 em $[a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$. Dados quaisquer $x \in (a, b)$ e $m \geq 1$, mostre que podemos encontrar $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (1 - \theta)^{2-m}}{2m} \cdot (x - x_0)^2.$$

Questão 8. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa e limitada deve ser necessariamente uma função constante.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado - Soluções

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

14 de Fevereiro de 2022

Candidato(a): ____

1. Observar que o ínfimo de um conjunto limitado inferiormente é um número real. Uma sequência (x_n) de elementos de X que converge para o ínfimo deve ser uma sequência constante, a menos de uma quantidade finita de termos, pois $|x_n - x_m| \in \mathbb{N}$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Provar, indutivamente, que $f(x^n) = nf(x)$, para todos $x \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, estender a propriedade para $n \in \mathbb{Z}$ e depois para o conjunto dos números racionais

$$0 = f(1) = f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n})$$

e

$$qf(x^{p/q}) = f((x^{p/q})^q) = f(x^p) = pf(x) \Rightarrow f(x^{p/q}) = \frac{p}{q}f(x).$$

Finalmente, usar a continuidade de f para estender a propriedade para todo expoente real e concluir a solução.

3. $\Rightarrow$) Como (x_n) preserva sinal, podemos supor, sem perda, que $x_n > 0$. Sendo $x_n \to L$ segue de $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}}$ que $L = \alpha \cdot L$. Note que $L = 0$ pois do contrário, $\alpha = 1$ e portanto $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n \Rightarrow x_{n+1} > (n+1)x_1$ o que é absurdo. Por similar argumentação tem-se que $\alpha \in (0, 1)$. O resultado agora segue pelo Teste de d'Alembert uma vez que para n suficientemente grande $\alpha + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$.
$\Leftarrow$) Como $\sum x_n$ converge absolutamente temos trivialmente que $x_n \to 0$.

4. $\Rightarrow$) Sabemos que $a \in X'$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tem infinitos pontos. Neste caso, escolhemos uma sequência (x_n) de forma indutiva tal que $x_1 \in X \setminus \{a\}$ e para todo $n \geq 1$,

$$x_{n+1} \in \left(X \cap \left(a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right)\right) \setminus \{a, x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

A sequência satisfaz a condição desejada.
$\Leftarrow$) Seja (x_n) tal que $x_n \longrightarrow a$ e seus termos são dois a dois distintos. Isto nos leva a concluir imediatamente que para todo $\varepsilon > 0$, $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tem infinitos pontos. O resultado segue.

5. Considere a função

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad x \in [a, b].$$

Observe que $h(b) = h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$. Logo, o Teorema de Rolle implica que existe $c \in (a, b)$ com a propriedade desejada.

6a. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia, temos

$$F'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad f'(t) = \frac{\sqrt{1 + (t^2)^4}}{(t^2)} \cdot (2t).$$

Derivando mais uma vez a primeira relação, obtemos $F''(x) = f'(x)$, logo

$$F''(2) = f'(2) = \frac{\sqrt{1 + (2^2)^4}}{(2^2)} \cdot (2 \cdot 2) = \sqrt{1 + 2^8}.$$

6b. A fórmula da soma das séries geométricas fornece, para todo $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}.$$

Integrando termo a termo no intervalo entre 0 e x, concluímos

$$arctg(x) - arctg(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1},$$

para todo $|x| < 1$. Tome $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$ para concluir o que foi pedido.

7. Pela fórmula de Taylor com resto integral, temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^2 \int_0^1 (1-t) f''(x_0 + t(x - x_0))dt.$$

Escreva

$$\int_0^1 (1-t) f''(x_0 + t(x-x_0))dt = \int_0^1 g(t) \cdot (1-t)^{m-1} dt,$$

onde $g(t) = f''(x_0 + t(x - x_0))(1-t)^{2-m}$. Fazendo a substituição $s = (1-t)^m$, podemos reescrever a integral na forma

$$\frac{1}{m} \int_0^1 g(1 - s^{1/m})ds = \frac{g(\theta)}{m} = \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))(1-\theta)^{2-m}}{m},$$

para algum $\theta \in [0, 1]$. A penúltima igualdade segue do Teorema do valor médio para integrais, e encerra a prova.

8. Uma função convexa deve satisfazer

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

para todos $a \leq b \leq c$. Suponha, por contradição, que $f(a) < f(b)$ (o caso $>$ é análogo). Então

$$f(c) \geq \frac{c-a}{b-a}\left(f(b) - \frac{c-b}{c-a} f(a)\right) > (c-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Fazendo $c \to +\infty$, obtemos $f(c) \to +\infty$. Uma contradição.