UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Avaliação - Analise no $\mathbb{R}^n$

Cada questão vale 2 pontos.

1) De um exemplo de um difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \mapsto S^1$. Prove que não existe $h : S^1 \to \mathbb{R}$ continua e injetiva.

Solução: Exemplo: $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, temos que $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ logo pelo teorema da aplicação inversa f é um difeomorfismo local.

Seja $h : S^1 \to \mathbb{R}$ continua e injetiva, como h é continua temos que $h(S^1)$ é conexo e fechado, ou seja $h(S^1) = [a, b]$, seja $a < c < b$, como h é injetiva $h^{-1}(c) = \{d\}$, então $h(S^1 - \{d\}) = [a, c) \cup (c, b]$ uma contradição pois a imagem de um conexo não pode ser desconexa.

2) Seja U aberto convexo, e $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ diferenciavel, considere as seguintes afirmações:

(a) $\|f'(x)\| < c$ para todo $x \in U$.

(b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$.

(c) f é uniformemente continua.

Prove que (a)⇒(b)⇒(c). As implicaçoes (c)⇒(b)⇒(c) são verdadeiras? Justifique.

Solução: *a)* $\Rightarrow$ *b)* Dado $x, y \in U$, como U é conexo podemos aplicar a desigualdade do valor médio logo

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

b) $\Rightarrow$ *c)* Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/c$. Se $\|x - y\| < \delta$ temos $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Seja $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$, para t suficientemente pequeno temos $x + tv \in U$ logo $\|f(x + tv) - f(x)\|/t \leq c\|v\|$.

Fazendo $t \to 0$ temos $\|f'(x)v\| \leq c\|v\|$, como v é arbitrário temos o resultado.

$c) \Rightarrow b)$ Falso: Tomamos $f(x) = \sqrt{x}$, $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, como a $\sqrt{x}$ esta definido em $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ é compacto temos que f é uniformemente continua. Se $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ pela parte anterior teriamos $f'(x) = 1/2\sqrt{x} \leq c$ uma contradição.

3) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ ambas de classe C^1, tal que $\varphi \circ f(U) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$. Dado $a \in U$ e $b = f(a)$, prove que a dimensão do núcleo de $\varphi'(b)$ é maior que $n - 2$ ou $\det f'(a) = 0$.

Solução: Seja $\varphi \circ f : U \to \mathbb{R}^2$, temos que $\varphi(f(U)) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, logo $\varphi \circ f'(x) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

Pela regra da cadeia $\varphi \circ f'(a) = \varphi'(f(a)) \circ f'(a)$. Se $\det f'(a) \neq 0$ logo $f'(a)$ é um isomorfismo, então $\dim \operatorname{Im} f'(a) = n$ e $\dim \operatorname{Ker} f'(a) = 0$.

Do teorema do núcleo e imagem temos que $\dim \operatorname{Ker} \varphi \circ f'(a) > n - 2$, como $\operatorname{Ker} f'(a) = \{0\}$ logo $\dim \operatorname{Ker} \varphi'(f(a)) > n - 2$.

4) Seja $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x$, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} f$.

Solução: Denotando por $\mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2;\ x > 0\}$ e $\mathbb{S}^2_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2;\ x < 0\}$ temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} f = \int_{\mathbb{S}^2_+} f + \int_{\mathbb{S}^2_-} f$$

pois todo grande círculo na esfera tem medida nula.

Agora consideramos a isometria $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $F(x, y, z) = (-x, y, z)$, que satisfaz $F(\mathbb{S}^2_+) = \mathbb{S}^2_-$. Observamos que as parametrizações $\varphi : B_1 \to \mathbb{S}^2_+$ dada por $\varphi(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ e $\psi : B_1 \to \mathbb{S}^2_+$ dada por $\psi(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ satisfazem $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : B_1 \to B_1$ e $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi(y, z) = (y, z)$

Logo, pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\int_{\mathbb{S}^2_-} f = \int_{\mathbb{S}^2_+} f \circ F = -\int_{\mathbb{S}^2_+} f \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{S}^2} f = 0$$

5) Seja $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$ a 2-forma diferencial dada por

$$\omega = z\, dx \wedge dy + y\, dx \wedge dz + x\, dy \wedge dz.$$

Restrinja ω a esfera unitária e calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} \omega$.

Solução: É fácil verificar que $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ e como o borda da bola de raio um $\partial B_1 = \mathbb{S}^2$, temos, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{B_1} d\omega = \int_{B_1} dx \wedge dy \wedge dz = \mathrm{vol}(B_1)$$