UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

07 de junho de 2021

Candidato: ____

Questão 1. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f não é de classe C^2 em nenhuma vizinhaça contendo a origem $(0,0)$.

Prova: Basta observar que

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \\ D_1 f(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)}{h} = -y, \;\; y \neq 0 \\ D_2 f(x,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)}{h} = x, \;\; x \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$D_2 D_1 f(0,0) = -1 \quad \text{e} \quad D_1 D_2 f(0,0) = 1.$$

Como $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$, pelo Teorema de Schwartz, concluímos que f não é de classe C^2 em vizinhança da origem.

Questão 2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Suponha que existam constantes $0 < \beta < \lambda$ tais que

$$\beta\,|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq \lambda\,|x-y|.$$

Mostre que Ω e $f(\Omega)$ são homeomorfos.

Prova: Pela desigualdade $|f(x)-f(y)| \leq \lambda\,|x-y|$, f é contínua. A desigualdade $|f(x)-f(y)| \geq \beta\,|x-y|$ diz que f é injetiva, logo $f : \Omega \to f(\Omega)$ é bijetiva, e que

$$|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| \leq \frac{1}{\beta}\,|u-v|$$

Logo, f^{-1} é contínua e Ω é homeomorfo a $f(\Omega)$.

Questão 3. Seja $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com as seguintes propriedades:
(i) A matriz jacobiana de f possui norma diferente de zero em todo ponto do domínio de f;
(ii) Existe função $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lambda(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $\operatorname{grad} f_1 = \lambda \operatorname{grad} f_2$.

1. Qual o posto de f em um ponto qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

2. Como você descreveria o conjunto imagem de f? Prove sua afirmação.

Prova: A matriz jacobiana

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

possui determinante zero para todo (x,y), mas como possui norma não nula, podemos concluir que o posto de f é constante e igual a 1.

Pelo teorema do posto a imagem de f é uma curva que pode ser parametrizada por um caminho de classe C^1.

Questão 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Dizemos que uma função $u : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é harmônica se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em todos os pontos de U. Mostre que, se os pontos críticos de u são todos não-degenerados, então u não possui máximos nem mínimos locais.

Prova: Seja $x = (a,b)$ um pondo crítico de u

$$Du(x) = 0.$$

Sua matriz Hessiana é dada por

$$D^2u(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x) \end{pmatrix}$$

Para $v = (\alpha, \beta)$ um vetor qualquer, temos a forma quadrática associada

$$H(x) \cdot v^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\alpha^2 + 2.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x)\alpha\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x)\beta^2.$$

Portanto, se tomarmos $v_1 = (1,0)$, temos

$$H(x) \cdot v_1^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \tag{1}$$

e se tomarmos $v_2 = (0,1)$ temos

$$H(x) \cdot v_2^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x). \tag{2}$$

Usando a hipótese que u é harmônica, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x) \tag{3}$$

e já que x é um ponto não-degenerado, segue-se que

$$\text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) < 0.$$

Portanto, se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) > 0$ segue de (1) que $H(x) \cdot v_1^2 > 0$, logo, de (2) e (3), temos $H(x) \cdot v_2^2 < 0$, ou seja, a forma quadrática é indefinida (o outro caso é análogo), portanto o ponto crítico não pode ser máximo nem mínimo.

Questão 5. Considere as seguinte bolas $B_1 = B_{R/2}(x_0)$ e $B_2 = B_R(x_0)$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se $x \in B_1$, temos

$$\int_{B_2} |x-y|^{\lambda-n} dy \leq \left(\frac{1+2^{n-\lambda}}{\lambda} \right) n\omega_n R^\lambda$$

para $0 < \lambda < n$, onde ω_n representa o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\omega_n = \mathrm{Vol}(B_1)$.

Prova: Como $x \in B_1$, temos que $B_{R/2}(x) \subset B_R(x_0) = B_2$. Logo

$$\begin{aligned} \int_{B_2} |x-y|^{\lambda-n} dy &= \int_{B_{R/2}(x)} |x-y|^{\lambda-n} dy \\ &+ \int_{B_R(x_0)-B_{R/2}(x)} |x-y|^{\lambda-n} dy. \end{aligned}$$

Agora observe que, pelo Teorema da Mudança de Variável,

$$\int_{B_{\epsilon/2}(x)} |x-y|^{\lambda-n} dy = \int_{B_{\epsilon/2}(x_0)} |x_0-y|^{\lambda-n} dy.$$

Como, $y \in B_R(x_0) - B_{R/2}(x)$ temos $|x-y| \geq \dfrac{R}{2} \geq \dfrac{|x_0-y|}{2}$ e portanto

$$|x-y|^{\lambda-n} \leq \frac{2^{\lambda-n}}{|x_0-y|^{n-\lambda}}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_2} |x-y|^{\lambda-n} dy &\leq \int_{B_{R/2}(x_0)} |x_0-y|^{\lambda-n} dy \\ &+ 2^{n-\lambda} \int_{B_2-B_{R/2}(x)} |x-y|^{\lambda-n} dy \\ &\leq \int_{B_2} |x_0-y|^{\lambda-n} dy \\ &+ 2^{n-\lambda} \int_{B_2} |x_0-y|^{\lambda-n} dy \\ &= (1+2^{n-\lambda}) \int_{B_R(x_0)} |x_0-y|^{\lambda-n} dy \\ &= \left(\frac{1+2^{n-\lambda}}{\lambda} \right) n\omega_n \epsilon^\lambda \end{aligned}$$