



Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Exame de Qualificação - 2020.1

Combinatória

Aluno:

Matrícula:

Sugestão de pontuação: 1.5; 1.5; 2.5; 2.5; 2

Questão 1. Prove que se G é um cografo, então G é perfeito.

Precisamos mostrar que $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo induzido H de G . Note que a classe dos cografos é uma classe hereditária, portanto basta mostrar que isso vale para G . Fazemos isso por indução em $|V(G)|$. Se G é trivial, então não há nada a provar; logo suponha $|V(G)| \geq 2$. Usando decomposição modular, sabemos que se G é um cografo, então G é a união de dois cografos, ou o “join” de dois cografos. Sejam então G_1, G_2 cografos a partir dos quais G é obtido. Por HI, sabemos que $\chi(G_i) = \omega(G_i)$, para $i = 1$ e $i = 2$; denote por V_i o conjunto $V(G_i)$. Analisamos os casos:

- *G é a união de G_1 e G_2 : provamos que $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ e que $\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$. Suponha, *spdg*, que $\chi(G_1) \geq \chi(G_2)$ (o que implica $\omega(G_1) \geq \omega(G_2)$). Claramente $\chi(G) \geq \chi(G_1)$ já que G_1 é subgrafo de G ; além disso, podemos obter uma coloração de G com $\chi(G_1)$ cores apenas reutilizando em V_2 as cores usadas em V_1 . Já a desigualdade $\omega(G) = \omega(G_1)$ vale trivialmente pois não existem arestas entre V_1 e V_2 em G .*
- *G é o join de G_1 e G_2 : provamos que $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ e que $\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$. Para a primeira equação, note que $\chi(G) \geq \chi(G_1) + \chi(G_2)$, já que as cores usadas em V_1 em uma coloração de G não poderão ser usadas em V_2 , e vice-versa. Além disso, dadas colorações ótimas de G_1 e G_2 , podemos obter uma de G apenas usando cores $\{1, \dots, \chi(G_1)\}$ em V_1 , e cores $\{\chi(G_1) + 1, \dots, \chi(G_1) + \chi(G_2)\}$ em V_2 . Para ver que $\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$, observe primeiro que uma clique de G_1 combinada com uma de G_2 formam uma clique de G , logo $\omega(G) \geq \omega(G_1) + \omega(G_2)$. Para o outro lado, basta ver que dada uma clique C de G , temos que $C \cap V_1$ é clique de G_1 e que $C \cap V_2$ é clique de G_2 .*

Questão 2. Prove que se G é bipartido k -regular, então $\chi'(G) = k$.

Sabemos que $\chi'(G) \geq k$ já que as arestas incidentes em um vértice precisam ter todas cores distintas. Para mostrar $\chi'(G) \leq k$, provamos que G possui um emparelhamento perfeito. Sendo assim, podemos aplicar indução em k para obter uma k -coloração das arestas de G , já que a remoção de um emparelhamento perfeito de G nos dá um grafo $(k - 1)$ -regular.

Considere então G um grafo bipartido k -regular com partes X e Y ; suponha $k \geq 1$, caso contrário o grafo é vazio e não há nada a provar. Primeiro, observe que $|X| = |Y|$, já que $|E(G)| = k \cdot |X| = k \cdot |Y|$. Agora, para provar que G satisfaz a condição de Hall, considere $S \subseteq X$, e denote por $\delta(S), \delta(N(S))$ o conjunto de arestas com uma extremidade em $S, N(S)$, respectivamente. Como G é k -regular, sabemos que $|\delta(S)| = k \cdot |S|$ e que $|\delta(N(S))| = k \cdot |N(S)|$. Mas como $\delta(S) \subseteq \delta(N(S))$, temos que $|\delta(S)| \leq |\delta(N(S))|$, seguindo que $|S| \leq |N(S)|$. Pelo Teorema de Hall, segue que G possui um emparelhamento cobrindo X , e como $|X| = |Y|$, temos que este emparelhamento é perfeito.

Questão 3. Sabendo que todo grafo periplanar possui um vértice de grau no máximo 2, prove que se G é periplanar, então G tem largura em árvore no máximo 2.

Por indução em $|V(G)|$. Se $|V(G)| = 1$, então segue trivialmente. Suponha então válido para todo grafo periplanar com até $|V(G)| - 1$ vértices. Seja $u \in V(G)$ de grau no máximo 2. Consideramos dois casos:

- $N(u) = \{w\}$: considere uma decomposição em árvore $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ de $G - u$ (existe por hipótese de indução já que $G - u$ é claramente periplanar). Seja $t \in V(T)$ tal que $w \in X_t$; existe pela definição de decomposição em árvore. Então adicione um novo nó, t' , em T , faça t' adjacente a t e $X_{t'} = \{u, w\}$. Claramente, a largura em árvore da decomposição obtida é ainda no máximo 2;
- $N(u) = \{v, w\}$: observe que u é um vértice de corte, ou v e w estão em um mesmo ciclo na face externa. Em ambos casos, pode-se ver que G' obtido de $G - u$ pela adição da aresta vw é também periplanar. Considere então uma decomposição em árvore $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ de G' . Por definição de decomposição em árvore, existe $t \in V(T)$ tal que $\{v, w\} \subseteq X_t$. Adicionamos um novo nó t' adjacente a t , e fazemos $X_{t'} = \{u, v, w\}$. Novamente, a decomposição em árvore obtida tem largura no máximo 2.

Questão 4. Seja k um inteiro, $k \geq 2$. Prove que se G é k -conexo e $|V(G)| \geq 2k$, então G contém um ciclo de tamanho ao menos $2k$.

Por contradição, considere um ciclo C de tamanho máximo em G . Se $|C| < k$, como G possui ao menos $2k$ vértices, deve existir $v \in V(G) \setminus V(C)$, além de $k - |V(C)|$ vértices em $V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\})$; denote este conjunto de vértices por S . Como G é k -conexo, pelo Fan-Lemma, devem existir k caminhos internamente disjuntos entre v e cada um dos vértices de $V(C) \cup S$. Mas agora, adicionando v a C obtemos um ciclo maior, contradição. Logo suponha $|C| \geq k$. Novamente pelo Fan-Lemma, devem existir k caminhos internamente disjuntos entre v e k vértices de C ; denote o conjunto destes k vértices por C' . Como $|V(C - C')| < k$, devem haver dois vértices em C' adjacentes entre si, novamente nos dando uma contradição pois poderíamos obter um ciclo maior.

Questão 5. Usando o método da descarga, prove que se G tem grau médio inferior a 3, então $\delta(G) \leq 1$ ou G possui uma aresta uv tal que $d(u) \leq 2$ e $d(v) \leq 5$. Dica: use cargas somente nos vértices.

O grau médio de um grafo G é dado por $\frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{n}$. Assim, se o grau médio é inferior a 3, temos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) < 3n$ e vale a equação abaixo:

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 3) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 3n < 0.$$

Suponha que $\delta(G) \geq 2$, caso contrário não há nada a provar. Por contradição, suponha que $d(u) \geq 6$, para todo $uv \in E(G)$ tal que $d(v) = 2$. Damos carga inicial $d(v) - 3$ para todo $v \in V(G)$, e aplicamos a seguinte regra de descarga:

(R) Cada vértice de grau 2 recebe $1/2$ de carga de cada um de seus vizinhos.

Agora, mostramos que a carga final de todo vértice é não negativa, contrariando a equação anterior. Observe que, como nenhum vértice de grau 2 possui vizinhos de grau no máximo 5, e pela própria regra de descarga, os vértices de grau no máximo 5 estão com carga não-negativa ao final. Além disso, se $d(v) \geq 6$, temos que a carga final de v é ao menos:

$$d(v) - 3 - \frac{d(v)}{2} = \frac{d(v)}{2} - 3 \geq 0.$$