UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Análise

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

11 de Março de 2019

Candidato: ____

Parte I

Questão 1. Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo. Usando a definição de medida exterior, mostre que R é Lebesgue mensurável e $m(R) = \text{Vol}(R)$.

Questão 2. Resolva os itens abaixo:

a) Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}, & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre que para cada $\delta > 0$ a função f é integrável em $B_\delta^c := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$ e existe uma constante $C = C(n, \delta) > 0$ tal que

$$\int_{B_\delta^c} f(x)dx \leq C.$$

b) Existe uma função contínua e positiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é integrável e $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Questão 3. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável e que x é um ponto do conjunto de Lebesgue de f. Considere

$$\mathcal{A}(t) := \frac{1}{t^n} \int_{B_t} |f(x-y) - f(x)|dy, \quad \text{se } t > 0,$$

onde $B_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < t\}$. Mostre que

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}(t) = 0.$$

Conclua que existe $C > 0$ tal que $\mathcal{A}(t) \leq C$ para todo $t > 0$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e periódica de período 1, isto é, $f(x+1) = f(x)$. Assuma que existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^1 |f(x+c) - f(x+d)| \, dx \leq M,$$

para quaisquer $c, d \in \mathbb{R}$. Prove que f é integrável em $[0, 1]$.

Parte II

Questão 5. Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $T : X \to Y$ linear contínua satisfazendo

$$\|Tx\| \geq C\|x\|, \ \ \forall\, x \in X,$$

onde $C > 0$. Prove que a imagem de T é fechado em Y.

Questão 6. Sejam E, F espaços de Banach, $T : E \to F$ linear contínua e sobrejetiva, $S : F \to E$ linear tal que $T \circ S = I_F$, a identidade de F, e cuja imagem $S(F)$ é um fechado em E. Mostre que S é contínua.

Questão 7. Sejam H um espaço de Hilbert e $F \subset H$ um subespaço fechado próprio. Seja $x_0 \in H$. Mostre que

$$d(x_0, F) = \max\{|\langle x_0, y\rangle|;\ y \in F^{\perp} \text{ e } \|y\| = 1\},$$

onde $F^{\perp} = \{w \in H;\ \langle w, f\rangle = 0,\ \forall\, f \in F\}$.

Questão 8. Mostre que se H é um espaço de Hilbert, $T : H \to H$ é um operador compacto e (e_n) é uma sequência ortonormal em H, então $Te_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Sugestão: utilizar a desigualdade de Bessel.