UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIENCIAS
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA CURSO DE MESTRADO

Exame de seleção de Mestrado
Data: 22/02/2017
Banca Examinadora: Fabricio Benevides e Frederico Girão
TOTAL DE QUESTOES: 7

1. Mostre que a interseção de uma sequência descendente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos é um intervalo ou o conjunto vazio.

2. Seja $\omega \in \mathbb{R}$ um número irracional positivo. Seja $A = \{m+n\omega : m+n\omega > 0 \text{ e } m, n \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que $\inf A = 0$.

3. Mostre que se (x_n) é uma sequência convergente, então a sequência (y_n) definida por $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ também converge e $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dê um exemplo que mostra que é possível que (y_n) seja convergente mesmo que (x_n) não seja.

4. Resolva os seguinte itens:

   (a) Considere as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n > 0$ e $y_n > 0$. Suponha que existe $k \geq 1$ tal que, para todo $n \geq k$, vale
   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$
   Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

   (b) Suponha $y_n > 0$ para todo n natural e que existe $k \geq 1$ tal que para todo $n \geq k$ vale
   $$n\left(1 - \frac{y_{n+1}}{y_n}\right) \leq 1.$$
   Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

5. Dizemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é interessante se é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b), possui infinitos zeros, mas não existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. Prove que se f é interessante então $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$. Dê um exemplo de uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ interessante.

6. Suponha que f é contínua em $[a, b]$ e f'' existe em (a, b). Se existe um x_0 em (a, b) tal que o segmento que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ contém o ponto $(x_0, f(x_0))$. Mostre que existe c em (a, b) tal que $f''(c) = 0$.

7. Seja f uma função integrável no intervalo $[a, b]$ tal que $f(q) = 0$ para todo q racional (não sabemos nada sobre o valor de $f(x)$ quando x é irracional). Prove que
   $$\int_a^b f(x)dx = 0.$$