UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame de seleção de Mestrado
Data-05/07/2016
Banca Examinadora: Lev Birbrair, Alexandre Fernandes & J. Edson Sampaio
TOTAL DE QUESTÕES: 07

1. Mostre que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável.

2. Seja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Suponha que a derivada de f nunca se anula. Mostre que f é uma função monótona.

3. Seja (a_n) uma sequência de números inteiros no conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Demonstre que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge.

4. Seja $f\colon [1,3]\colon \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 2, & \text{se} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$
Mostre que f não possui uma primitiva.

5. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que: se $\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$, então $f(x) = 0$ para todo x em $[a,b]$.

6. Sejam $P\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida no intervalo $[0,1]$ e seja I a sua imagem. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que a composta $f \circ P$ é uma função contínua. Mostre que f é uma funcão contínua.

7. Demonstre que toda sequência de Cauchy, em $\mathbb{R}$, é convergente.