Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Pós Graduação em Matemática

Teste de Seleção para Mestrado em Matemática
Análise na Reta - 2016.1

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(A)$ é aberto para todo $A \subset \mathbb{R}$ aberto. Prove que f é uma função monótona.

Questão 2. Prove que:
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, onde $a \in \mathbb{R}$.

Questão 3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$|f(x) - f(y)| < |x-y|^\alpha$$

para $x, y \in [0,1]$ quaisquer e $\alpha > 1$. Mostre que f é constante.

Questão 4. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas definidas em um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Prove que

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in [a,b],$$

é uma função contínua.

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(f(f(x))) = x$$

Prove que f é bijetora.

Questão 6. Dados subconjuntos A e B de $\mathbb{R}$, defina

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} : c = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

Prove que:
a) $A + B$ é limitado se, e somente se, A e B são limitados.
b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.