UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Exame de Acesso ao Doutorado

Data: 22/02/2017
Horário: 14:00 às 18:00 horas
Aluno(a):______________________________________ Nota:________

1. a) Sejam $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções suaves definidas nos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente. Seja $\varphi\colon U \to V$ um difeomorfismo suave tal que $g \circ \varphi = f$. Mostre que $p \in U$ é um ponto crítico não-degenerado de f se, e somente se, $q = \varphi(p)$ é um ponto crítico não degenerado de g.

   b) Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função suave, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, com ponto crítico $p \in U$. Mostre que: se a matriz hessiana de f em p tem determinante negativo, então, em qualquer vizinhança de p, há um par de pontos x e y tais que $f(x) < f(p) < f(y)$.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ o subconjunto definido pela interseção de uma bola aberta centrada na origem com o cone abaixo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2 \text{ e } z \geq 0\}.$$

   Mostre que não existe uma aplicação diferenciável $F\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida em aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, com posto constante igual a 2, tal que sua imagem seja igual ao conjunto A.

3. Mostre que toda função monótona $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é integrável.

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida em $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ por $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

   a) Considere a exaustão $U = \cup L_k$, onde

   $$L_k = \Big\{ r \cdot e^{i\theta}; \frac{1}{k} \leq r \leq k, \frac{1}{k} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k} \Big\},$$

   use coordenadas polares e conclua que a integral imprópria $\displaystyle\int_U f(x, y)dxdy$ é convergente e vale $\pi/4$.

   b) Por outro lado, usando a exaustão $U = \cup K_i$, onde $K_i = \left[\frac{1}{i}, i\right] \times \left[\frac{1}{i}, i\right]$, mostre que $\displaystyle\int_U f(x, y)dxdy = \Big(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \Big)^2$.

   c) Conclua que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ o toro bidimensional com a orientação determinada pelo produto de variedades diferenciáveis orientadas. Calcule

   $$\int_{\mathbb{T}^2} \omega,$$

   onde $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 \, dx_4 \wedge dx_2$.

6. Suponha que existe ω uma $(n-1)$-forma em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $d\omega = 0$ e

   $$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega \neq 0,$$

   onde $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ e $n \geq 2$. Demonstre que ω não é exata.