



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# EXAME DE SELEÇÃO EM ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$

**PGMAT - Pós-Graduação em Matemática**

05 de Julho de 2016

**Candidato:** \_\_\_\_\_

**Questão 1.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$ , para todo  $p \in U$  e para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é constante.

**Questão 2.** Seja  $K \subset \mathbb{R}^N$  tal que para toda função contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  existe uma constante positiva  $C_f$  tal que

$$|f(x)| \leq C_f, \quad \forall x \in K.$$

Prove que  $K$  é um compacto.

**Questão 3.** Seja  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Defina

$$g(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy \right).$$

Mostre que  $g \equiv f$ .

**Questão 4.** Enuncie e prove o Teorema de Green sob a condição de que a curva considerada delimita uma região  $D \subset \mathbb{R}^2$  dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

onde  $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas.

**Questão 5.** Determine os pontos de altura máxima e mínima, em relação ao eixo  $0z$ , da superfície  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6 = 0\}$ .

**Questão 6.** Encontre o volume do sólido que está abaixo do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e acima da região  $D$  do plano  $xy$  limitada pela reta  $y = 2x$  e a parábola  $y = x^2$ .

**Questão 7.** Sejam  $B_{2016} \subset \mathbb{R}^m$  e  $f : B_{2016} \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função de classe  $C^1$  localmente injetiva. Prove que  $m \leq N$  e que o conjunto

$$D = \{x \in B_{2016} : f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ é injetiva} \}$$

é aberto e denso em  $B_{2016}$ .