



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Prova de Seleção do Doutorado

Período: 2016-1- Data-15/02/2016

Aluno:

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $K \subset \mathbb{R}^m$, com X fechado e K compacto. Mostre que uma função $f : X \rightarrow K$ é contínua se, e somente se, o gráfico de f , $\text{Graf}(f)$, é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 e própria. Suponha que para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz jacobiana de f em x é invertível. Mostre que f é sobrejetiva.
3. Seja $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio homogêneo de grau maior ou igual a 1. Mostre que $P^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície C^∞ para todo $c \neq 0$.
4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto convexo com $0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^2 tal que $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$. Mostre que se $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x) \right\| \leq \|u\| \|v\|$ para todo $x \in U$ e para todos $u, v \in \mathbb{R}^m$, então $\|f(x)\| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2$ para todo $x \in U$.
5. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que $|f|$ é integrável e

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

6. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que

$$\frac{1}{\text{vol}_n(A)} \int_A f(x) dx = f(c).$$

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\int_X f(x) dx = 0$, então $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tem medida n -dimensional nula.