UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE DOUTORADO

Exame de seleção de Doutorado
Data-27/07/2015
Banca Examinadora: Gregório Pacelli Bessa, Alexandre Fernandes-
TOTAL DE QUESTÕES: 7

1. Seja $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de suconjuntos fechados e com interior vazio em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a reunião $\cup_{i\in\mathbb{N}}F_i$ tem interior vazio em $\mathbb{R}^n$.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função duas vezes diferenciável no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ seja identicamente nula em U. Mostre que existem funções $g : I \to \mathbb{R}$ e $h : J \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis nos intervalos I e J de $\mathbb{R}$ satisfazendo:

$$f(x, y) = g(x) + h(y) \ \forall \ (x, y) \in U.$$

3. Seja $F : \mathbb{R}^{2015} \to \mathbb{R}^{2014}$ uma aplicação continuamente diferenciável e de posto constante igual a 2014. Mostre qua a função $|F(x)|$ não assume valor máximo.

4. Enuncie e demonstre o Teorema de Green para domínios retangulares em $\mathbb{R}^2$.

5. Calcule o valor de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, admitindo que a integral imprópria converge.

6. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Seja

   $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ uma função contínua e seja $c \in \mathbb{R}^p$ tal que para cada $x \in X$ existe único $y \in K$ tal que $f(x, y) = c$. Mostre que esse y depende continuamente de x.

7. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o hemisfério de raio 1 e centro na origem definido abaixo

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}.$$

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y, z) = z^{2015}$. Calcule a integral $\displaystyle\int_S f dS$.