UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

04 de Julho de 2018

Candidato: ____

Questão 1. Seja (x_n) uma seqüência de números reais com a seguinte propriedade: Existe um número real L tal que de toda subseqüência de (x_n) pode se extrair uma subsubseqüência convergente para L. Mostre que a seqüência (x_n) é convergente e calcule seu limite.

Questão 2. Considere (x_n) uma seqüência de números reais arbitrária. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injetiva tal que $|\mathbb{N} \setminus \varphi(\mathbb{N})| < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ é absolutamente convergente.

Questão 3. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável no intervalo aberto I. Suponha que f tenha exatamente $N \in \mathbb{N}$ pontos críticos. Mostre que se $A = \{x \in I : f(x) = 0\}$ então a cardinalidade de A é menor ou igual a $N + 1$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é diferenciável se, e somente se, o for em $x = 0$.

Questão 5. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ tem-se

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

Questão 6. Considere os seguinte problemas:

a) Seja $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\, dt$. Calcule $F'(\pi)$.

b) Decida se a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\, dx$ é convergente ou não.

Questão 7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|dx.$$

Mostre com um contraexemplo que a mesma desigualdade não vale para a integral inferior.

Questão 8. Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$. Mostre que existe $x \in [0, \infty)$ tal que $f''(x) = 0$.