UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção 2018 - Doutorado

PGMAT - UFC

4 de Julho de 2018

Candidato: ______________________________

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e bem organizada.
2. Os argumentos devem ser cuidadosamente justificados para serem elegíveis à pontuação.

Questão 1. Prove que:

a) Toda coleção de abertos não-vazios de $\mathbb{R}^n$, dois a dois disjuntos, é enumerável.

b) O conjunto das matrizes $n \times n$ com determinante 1 é um fechado ilimitado com interior vazio em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Questão 2. Seja G o gráfico da função $y = |x| + 1$. Exiba um caminho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^{2018} tal que $f(\mathbb{R}) = G$ e $f(0) = (0, 1)$. Prove que todo caminho diferenciável nessas condições cumpre $f'(0) = (0, 0)$.

Questão 3. Sejam $U = \{x \in \mathbb{R}^{336};\ |x_i| < 1,\ i = 1, \cdots, 336\}$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq 3$, para todo $x \in U$, e $f(0) = 0$. Mostre que $f(U)$ é um intervalo e que $2018 \notin f(U)$.

Questão 4. Sejam ω uma 1-forma fechada, diferente de zero em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 sem pontos críticos. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A forma $f \cdot \omega$ é fechada;

b) $\{df, \omega\}$ é um conjunto linearmente dependente;

c) Para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x) \cdot v = 0$ se, e somente se, $\langle \nabla f(x), v \rangle = 0$.

Questão 5. Considere o polinômio $p(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5$. Mostre que existem bolas abertas $B = B((1, -1, 1, -1, 1, -1); \varepsilon)$ em $\mathbb{C}^6$ e $D = D(1; \delta)$ em $\mathbb{C}$ tais que para todo $b = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in B$, o polinômio

$$p_b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + b_5 z^5$$

tem uma única raiz $r = r(b)$ em D, a qual é simples, e a aplicação $r : B \to \mathbb{C}$, definida por $b \mapsto r(b)$, é de classe C^∞.

Questão 6. Sejam $A = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$ e $f : A \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Mostre que f é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre $f(A)$, e exiba o conjunto imagem $f(A)$.

b) Determine as funções $r, \theta : f(A) \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$.

c) Demonstre a veracidade da fórmula que

$$\iint_C h(x, y)\,dx\,dy = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r g(r, \theta)\,d\theta\,dr,$$

para toda função integrável $h : C \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$, sendo $C \subset f(A)$ a região plana entre os círculos de raio r_1 e r_2 e as duas semirretas que, na origem, formam ângulos θ_1 e θ_2 com o eixo dos x.

d) Sendo $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$, demonstre que

$$\iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

e) Conclua que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

"Para um matemático, *esse fato* deve ser tão óbvio como é, para o comum dos mortais, que o dobro de dois iguala quatro. Liouville, esse foi mesmo um matemático." (Lord KELVIN)