UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

13 de Agosto de 2018

Candidato: ____

Questão 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e simétrico com respeito a origem, isto é, se $x \in \Omega$, então $-x \in \Omega$. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função integrável que satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \Omega$, então mostre que

$$\int_\Omega f(x)dx = 0.$$

Questão 2. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Mostre que, para cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existe um único $z = F(x, y)$ tal que

$$\int_x^z f(s)\, ds = y.$$

e que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Questão 3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^1 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $m \geq 1$ e $n \geq 1$. Mostre que o conjunto $f(A)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{m+n}$, para todo bloco m-dimensional $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset U$.

Questão 4. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Defina $F : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$ por

$$F(x, y) = \int_{[0,x]\times[0,y]} f(r, s)\, drds.$$

1. Mostre que F é uma função contínua.
2. Mostre que, se f for contínua, então F é diferenciável.

Questão 5. Considere a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Prove que f não é integrável.
2. Mostre que a função $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

   $$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$$

   não é integrável.
3. Mostre que

   $$\int_0^1 \left(\underline{\int_0^1} f(x, y)\, dy \right) dx < \int_0^1 \left(\overline{\int_0^1} f(x, y)\, dy \right) dx$$