UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

06 de Março de 2018

Candidato: ____

Questão 1. Prove que a esfera $\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$ é conexa por caminhos.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A função f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$?

Questão 3. Seja $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Mostre que $\mathcal{B}$ é contínua e diferenciável com $\mathcal{B}'(x,y) \cdot (u,v) = \mathcal{B}(u,y) + \mathcal{B}(x,v)$.

Questão 4. Seja $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Defina $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(t) = \|\gamma(t) - p\|$ (norma euclidiana), onde p é um ponto de $\mathbb{R}^n$ que não pertence à imagem de γ. Prove que $|\varphi'(t)|$ é o comprimento da projeção de $\gamma'(t)$ sobre o eixo $\overline{p\gamma(t)}$.

Questão 5. Sejam $B_1 = B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ e $B_2 = B_r(x_0)$, respectivamente, a bola de raio $r/2$ e a bola de raio r centradas em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Mostre que, se $x \in B_1$,

$$\int_{B_2} \|x - y\|^{\lambda - n} dy \leq (1 + 2^{n-\lambda}) \int_{B_2} \|x_0 - y\|^{\lambda - n} dy = \frac{1 + 2^{n-\lambda}}{\lambda} \sigma_n r^\lambda$$

onde $0 < \lambda < n$. (Aqui σ_n designa a área da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$).

Questão 6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domíno compacto com fronteira regular e $F = (f,g) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2, com suporte de f contido no interior de Ω. Mostre que

$$\int_\Omega \det F'(x) dx = 0.$$