UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO

Exame Geral de Conhecimentos - 25/08/2016
Banca Examinadora: Alexandre Fernandes e Edson Samapio
Escolha 7 (sete) dos 9 (nove) problemas abaixo.

Nome: ____

1. Mostre que todo subespaço vetorial $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado. Além disso, se $E \neq \mathbb{R}^n$, então $\overline{\mathbb{R}^n - E} = \mathbb{R}^n$.

2. Mostre que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada.

3. Dada uma sequência de caminhos retificáveis $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, suponha que existe $c > 0$ satisfazendo $\ell(\gamma_n) \leq c$, para todo n. Se (γ_n) converge simplesmente para um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, i.e., para todo $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$. Mostre que γ é retificável e $l(\gamma) \leq c$.

4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ num ponto $a \in U$. Mostre que se não existirem pelo menos $m-1$ vetores $v_1, ..., v_{m-1}$, linearmente independentes, tais que $\frac{\partial f}{\partial v_i}(a) = 0$ para $i = 1, ..., m-1$, então f não é diferenciável no ponto a.

5. Dada $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, defina a extensão radial de f como a aplicação $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(0) = 0$ e $F(x) = \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, se $x \neq 0$. Mostre que F é diferenciável na origem se, e somente se, f é a restrição de uma aplicação linear.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Suponha que existe $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é um difeomorfismo.

7. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ retificável com $n > 1$. Mostre que $\gamma([a,b])$ tem n-medida nula.

8. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que
$$\frac{1}{vol_n(A)} \int_A f(x)dx = f(c).$$

9. Sejam $h > 0$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um subconjunto J-mensurável e
$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Sigma \text{ e } \ x_n = h\}.$$
Seja $C(A) = \{tx;\ x \in A \text{ e } t \in [0,1]\}$. Mostre que $C(A)$ é J-mensurável e, além disso,
$$vol_n(C(A)) = \frac{h}{n} vol_{n-1}(\Sigma).$$