UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Geral de Conhecimentos - Prova de Análise
Curso: Mestrado em Matemática
Data: 14/08/2015 - Horário: 14:00h-18:00h
Local: Sala 3 - Piso Superior–Bloco 914
Aluno: ____________________________

Justifique todas as suas afirmações, explicitando quais os teoremas e propriedades que foram utilizados.

1. Prove que toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ possui um número de Lebesgue.

   (**Recorde:** $\delta > 0$ é um número de Lebesgue de uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ se, para todo $Y \subset X$ com $\operatorname{diam}(X) < \delta$, existir $\lambda \in L$ tal que $Y \subset C_\lambda$).

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de classe $\mathcal{C}^1$, onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Considere $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = f(x)(x)$.

   (a) Mostre que F é de classe $\mathcal{C}^1$ e calcule sua diferencial;

   (b) Prove que, se $f(0)$ é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$, ambos contendo 0.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, com $f(0) = 0$. Mostre que existem funções contínuas $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$, onde x_i denota a i-ésima coordenada de x na base canônica de $\mathbb{R}^n$.

4. A reta dada pelas equações $z = y - x;\ y = (1-c)x + c$ e a superfície dada por $z = x^2 - y^2$ intersectam-se em $p = (1,1,0)$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $c \neq 0$, então p é um ponto isolado da interseção da reta com a superfície.

5. (a) Prove que o volume da bola unitária fechada $\mathbb{B}^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| \leq 1\}$ é $\frac{\pi^2}{2}$;

(b) Prove que, para todo n par

$$Vol(\mathbb{B}^n) = \frac{2\pi}{n} Vol(\mathbb{B}^{n-2}).$$

(**Sugestão:** decomponha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$).

6. Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto tal que $\overline{D} \subset \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que $f_{|\partial D} = 0$. Suponha que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\triangle f = \lambda f$. Mostre que

$$\int_D ||\nabla f||^2 + \lambda \int_D f^2 = 0 \quad \text{e que } \lambda < 0.$$