UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Exame de Qualificação em Análise

## PGMAT - **Doutorado em Matemática**

14 de Agosto de 2018

**Candidato**: ____________________________________________

## Parte I

**Questão 1.** Sejam $f \in L^1([0,b])$ e

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt, \quad \text{para } 0 < x \leq b.$$

Seja $(f_k)$ uma sequência em $L^1([0,b])$ tal que $f_k \to f$ em $L^1([0,b])$. Se $g_k(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{f_k(t)}{t} dt$ para $0 < x \leq b$, é possível mostrar que

$$\int_0^b g_k(x)dx \to \int_0^b g(x)dx \ ?$$

Justifique.

**Questão 2.** Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ um cubo. Usando a definição de medida exterior, mostre que $Q$ é Lebesgue mensurável e $m(Q) = \text{Vol}(Q)$.

**Questão 3.** Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, mostre que:

a. Existe um conjunto de medida finita $A$ tal que

$$\int_{A^c} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

b. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f(x)|dx < \varepsilon,$$

quando $m(E) < \delta$.

**Questão 4.** Considere a função

$$\eta(x) = \begin{cases} C_n \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se } \ |x| < 1, \\ \\ 0, \ \text{ se } \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $C_n > 0$ é uma constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Se $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$, prove que:

a. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
b. $f_\varepsilon \to f$ *a.e.* $x$ quando $\varepsilon \to 0$.

## Parte II

**Questão 5.** Seja $X$ um espaço normado de dimensão infinita.

(a) Apresente um argumento plausível que mostre que $B(X^*)$ não é compacta.

(b) Usando o Teorema de Hahn-Banach, construa uma sequência $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X^*)$ que não possua subsequências convergentes.

**Questão 6.** Seja $Y$ um subespaço de um espaço normado $X$. Então, para todo $x_0 \in X$ tal que

$$\operatorname{dist}\big(x_0, Y\big) > 0,$$

existe um funcional $f \in S(X^*)$ tal que $f \in Y^{\perp}$ e $\langle f, x_0 \rangle = \operatorname{dist}\big(x_0, Y\big)$.

**Questão 7.** Considere o espaço de Banach $X = C[0,1]$. Mostre que existe um functional linear $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\|\Lambda\| = 1$, mas

$$\langle \Lambda, \phi \rangle < \max_{0 \le t \le 1} |\phi(t)|,$$

para todo $\phi \in X$.

**Questão 8.** Sejam $X, Y$ espaços de Banach com $\dim(Y) < \infty$. Mostre que se $T\colon X \to Y$ é linear e limitado, então $T$ é um operador compacto. Mostre que a recíproca desse resultado é falso no caso $\dim(Y) = \infty$.