UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Preliminar do Doutorado - Prova de Geometria
Curso: Doutorado em Matemática
Data: 07/03/2018 - Horário: 14:00h-18:00h
Local: Sala 3 - Piso Superior–Bloco 914
Aluno: ______________________________

Justifique todas as suas afirmações, explicitando quais os teoremas e propriedades que foram utilizados.

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^2 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2)).$$

   (a) Determine o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ é uma submersão em } x\}$.

   (b) Se $f = (f_1, f_2)$, determine $r, s \in \mathbb{R}$ para que $f_1^{-1}(r) \cap f_2^{-1}(s)$ seja uma subvariedade mergulhada.

2. Mostre que, se M é uma variedade diferenciável que admite uma base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ para $\mathfrak{X}(M)$, então o fibrado tangente de M é trivial.

3. Prove que a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$$

   induz uma imersão injetiva $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^5$.

4. (a) Em $\mathbb{R}^4$, com coordenadas (x, y, u, v), considere o campo vetorial $X = \cos u \frac{\partial}{\partial x} + \sin v \frac{\partial}{\partial y}$ e a forma diferencial $\omega = x dx \wedge dy + u du \wedge dv$. Calcule $d\omega,\ i_X\omega,\ \mathcal{L}_X\omega$.

   (b) Prove que $\eta = x dy - y dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ é invariante pelas transformações lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de determinante igual a 1.

(c) Seja $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ a inclusão. Explicite as formas $\psi^*(\frac{dy\wedge dz}{x})$, $\psi^*(\frac{dz\wedge dx}{y})$ e $\psi^*(\frac{dx\wedge dy}{z})$ (definidas se $xyz \neq 0$) em coordenadas esféricas. Explique a razão das respostas encontradas.

5. Calcule os grupos de cohomologia do $\mathbb{RP}^2$.

6. Suponha que M^n seja uma variedade Riemanniana de dimensão n compacta e conexa com bordo não-vazio. Prove que uma função $u \in C^\infty$ é harmônica se, e somente se, u minimiza o funcional $\int_M |\mathrm{grad}\, u|_g^2 dV_g$, dentre todas funções suaves com os mesmos valores no bordo.