UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Preliminar do Doutorado em Matemática - Geometria
Data: 30/08/2016 - Horário: 14:00h-18:00h
Local: Sala 3 - Piso Superior–Bloco 914
Aluno: ______________________________

Questão 1. Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária de dimensão 2 e $\mathbb{RP}^2$ o espaço projetivo real de dimensão 2. Defina uma aplicação $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostre que F induz um mergulho suave de $\mathbb{RP}^2$ no $\mathbb{R}^4$.

Questão 2. Seja $G = O(n)$ o espaço da matrizes $n \times n$ (com entradas reais) ortogonais. Mostre que $O(n)$ é um grupo de Lie compacto. Além disso, se Ω é uma forma de volume invariante a esquerda, então Ω é bi-invariante.

Questão 3. Sejam S uma 2-subvariedade mergulhada, compacta com bordo, em uma 3-variedade Riemanniana M. Seja N um campo vetorial unitário suave, normal ao longo de ∂S. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e T é o campo vetorial unitário orientado positivamente tangente a ∂S, mostre que

$$\int_S \langle \mathrm{rot}(X), N \rangle = \int_{\partial S} \langle X, T \rangle,$$

onde $\mathrm{rot} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denota o operador rotacional definido por $(\mathrm{rot}\, X) \lrcorner\, dV_g = d(X^\flat)$.

Questão 4. Calcule os grupos de cohomologia de De Rham da variedade $M^3 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^1$ representam as esferas de dimensões 2 e 1, respectivamente.

Questão 5. Seja $\mathbb{RP}^n$ o espaço projetivo real de dimensão n. Prove que $\mathbb{RP}^n$ é orientável se, e somente se, n é ímpar.

Questão 6. Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma estrutura *quasi*-complexa em M é um tensor J tal que, para todo $p \in M,\ J_p^2 = -Id_{T_pM}$.

(a) Prove que se M possui uma estrutura *quasi*-complexa, então n é par.

(b) Suponha que $n = 2k$ e que M^{2k} possui um atlas diferenciável maximal $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ e uma estrutura *quasi*-complexa J tal que $J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$, então o tensor dado por

$$N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J([X,JY] + [JX,Y])$$

é nulo.