UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Geometria e Topologia

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

5 de Agosto de 2015

Candidato: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e bem organizada.
2. Os argumentos devem ser cuidadosamente justificados para serem elegíveis à pontuação.

Questão 1. Mostre que não existe

a) uma submersão suave $F : \mathbb{RP}^5 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

b) uma aplicação suave e injetiva $F : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$.

Questão 2. Sejam M e N variedades suaves, M compacta e $f : M \to N$ suave.

a) Mostre que se f é uma imersão injetiva, então $f(M)$ é uma subvariedade de N.

b) Seja $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x : y : z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Mostre que f é uma aplicação suave e que a imagem $f(\mathbb{RP}^2)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^4$.

Questão 3. Prove que

a) se ω é uma forma suave de grau ímpar, então $\omega \wedge d\omega$ é sempre fechada.

b) se ω é uma n-forma fechada em $\mathbb{S}^{2n}$, então $\omega \wedge \omega$ se anula em algum ponto.

Questão 4. Seja $G = \{A \in GL(2n, \mathbb{R});\ {}^tAJA = J\}$, onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Mostre que G é um grupo de Lie e calcule a sua dimensão.

b) Determine a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G.

c) Exiba $\mathcal{G}$ no caso $n = 1$.

Questão 5. Seja M uma variedade compacta, orientada e com bordo $\partial M \neq \emptyset$.

a) Use cohomologia de De Rham para mostrar que não existe função suave $f : M \to \partial M$ tal que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}_{\partial M}$.

b) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Use o item anterior para concluir que toda função suave $F : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ tem ponto fixo.

Questão 6. (*Princípio de Dirichlet*) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com fronteira não vazia. Prove que uma função $u \in C^\infty(M)$ é *harmônica* (i.e., $\Delta u = 0$) se, e somente se

$$\int_M |\nabla u|^2 \, dV_g \leq \int_M |\nabla v|^2 \, dV_g,$$

para toda função $v \in C^\infty(M)$ tal que $v|_{\partial M} = u|_{\partial M}$.

Questão 7. Enuncie o Teorema de Frobenius e indique como ele pode ser usado para resolver uma EDP.