UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO

Exame de seleção de Mestrado
Data: 20/01/2015
Banca Examinadora: Antonio Caminha e Alexandre Fernandes
TOTAL DE QUESTÕES: 6

1. Encontre, com justificativa, todas as funções contínuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f(x)+f(x^2)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

2. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade: para todo $y\in\mathbb{R}$, existe $\epsilon_y>0$ tal que $f^{-1}(y-\epsilon_y, y+\epsilon_y)$ é um conjunto limitado. Prove que a imagem de f é um conjunto ilimitado.

3. Dados $\alpha\in\mathbb{R}^*$ e $k\in\mathbb{Z}_+$, defina $\binom{\alpha}{k}$ pondo $\binom{\alpha}{0}=1$ e, se $k\geq 1$,
$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$
Mostre que, para todo $x\in(-1,1)$, tem-se
$$(1+x)^\alpha=\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

4. Encontre todas as funções deriváveis $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f(0)=0$ e $|f'(x)|\leq|f(x)|$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

5. Defina a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pondo
$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ se } x=1 \\ \frac{1}{n}, \text{ se } x=\frac{m}{n}, \text{ com } m,n\in\mathbb{Z}^* \text{ e } \gcd(m,n)=1 \\ 0, \text{ se } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}.$$
Explique, com justificativa, se f é integrável.

6. Prove que a integral imprópria $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ converge.