UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE DOUTORADO

Exame de seleção de Doutorado
Data: 10/12/2014
Banca Examinadora: Abdênago Barros, Antonio Caminha e Alexandre Fernandes
TOTAL DE QUESTÕES: 8

1. Um teorema de Weiestrass afirma que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada. Prove a recíproca desse fato: se $K \subset \mathbb{R}^n$ é tal que toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada, então K é compacto.

2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Suponha que $f : U \to \mathbb{R}^n$ seja um homeomorfismo uniformemente contínuo. Prove que $U = \mathbb{R}^n$.

3. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Defina uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \psi(x, y)$. Prove que f é diferenciável e que $Df(x, y).(v, w) = \psi(v, y) + \psi(x, w)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Prove que existe uma função contínua e injetiva $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, tal que $f \circ g$ é constante.

5. Calcule o valor de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$, admitindo que a integral imprópria converge.

6. Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Mostre que, se $A \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, então $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula.

7. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada e de classe C^1, com bordo $\partial M = C$, e $X = (a, b, c)$ um campo vetorial de classe C^1, definido em uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^3$ de M.

   (a) Se $\omega = ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy$, prove que $\omega_{|M} = \langle X, N\rangle dM$, onde N é o campo normal unitário a M, que dá a sua orientação, e dM é a forma elemento de volume de área de M

   (b) Se $C = \{(x, y, 0) \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$, e $X_{|C}$ é normal a C, use o Teorema de Stokes para calcular o valor da integral $\int_M \langle \mathrm{Rot}X, N\rangle dM$, onde o rotacional $\mathrm{Rot}X$ é definido por

   $$\mathrm{RotX} = (\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}).$$

8. Seja $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\Delta f = 1$ em $B_1(0)$ e $f = \varphi$ em $\mathbb{S}^2 = \partial B_1(0)$, onde φ é uma função contínua em $\mathbb{S}^2$. Prove que f é única.