UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame Geral de Conhecimentos - Análise

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

12 de agosto de 2014

Candidato: ____

1. Para $n \geq 0$, seja $J_n = \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n+1} d\theta$.

   (a) Mostre que $J_0 = 2$ e $J_1 = \pi/2$. Em seguida, use a fórmula de integração por partes para mostrar que $J_n = nJ_{n-2} - nJ_n$, para $n \geq 2$.

   (b) Mostre que, para $k \geq 1$ inteiro,

$$J_{2k} = \frac{2k(2k-2)(2k-4)\dots 2}{(2k-1)(2k-3)\dots 3} J_0 \quad \text{e} \quad J_{2k-1} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3}{2k(2k-2)(2k-4)\dots 2} J_1.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f não é injetiva.

3. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear simétrico. Defina $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle T(x), x \rangle$. Prove que f é diferenciável e calcule $\nabla f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, tal que $|f'(t)| \leq k < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

5. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ contínua e positiva satisfazendo $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = 1$. Para cada $x \in [0, 1]$, prove que existe um único $g(x) \in [1, 2]$ tal que $\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Mostre que g é de classe C^1.

6. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo. Se uma sequência de funções limitadas e integráveis $f_k : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$, então f é integrável e vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

7. Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com bases duais respectivas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ e $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Se $w_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j$, mostre que

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 = det(a_{ij}) \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3.$$

8. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e admita que $\mathbb{R}^3 \setminus M$ tem exatamente duas componentes conexas, uma das quais, que chamaremos Ω, é limitada e tal que $\partial\Omega = M$. Para $x \in M$, seja $N(x)$ o campo normal unitário a M, exterior a Ω. Se $0 \in \Omega$, prove o Teorema de Gauss:

$$\int_M \frac{\langle x, N(x) \rangle}{|x|^3} \sigma = 4\pi,$$

   onde σ denota o elemento de área de M. (Sugestão: se $X = \frac{x}{|x|^3}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, comece mostrando que $\operatorname{div} X = 0$; em seguida, use o Teorema da Divergência em $\Omega \setminus B(0; \epsilon)$.)