UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Análise:Doutorado

Data: 24/02/2014

Aluno: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e bem organizada.
2. Argumentos devem ser cuidadosamente justificaados para serem elegíveie à pontuação.

Questão 1. Mostre que existe $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sequência $\{f_n\}$ com $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $f_n \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$, porém $f_n(x) \nrightarrow f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Questão 2. Dizemos que $\{f_n\}$ **converge em medida** para uma função mensurável f se para todo $\epsilon > 0$

$$m(\{x : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Prove que se uma sequência $\{f_n\}$ de funções integráveis converge para f em L^1, então $\{f_n\}$ converge para f em medida. A recíproca é verdadeira?

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove que f satisfaz a condição de Lippschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para alguma constante M e quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f satisfaz as seguintes duas propriedades:

(i) f é absolutamente contínua.

(ii) $|f'(x)| \leq M$, para quase todo x.

Questão 4. Seja E um espaço normado, F um espaço de Banach e $\mathbf{p}$ uma norma sobre $\mathcal{B}(E, F)$ (espaço das transformações lineares contínuas de E em F com a norma usual) tal que

(a) $(B(E, F), \mathbf{p})$ é completo;

(b) $T_n \in B(E, F)$ com $\mathbf{p}(T_n) \to 0$ implica $T_n(x) \to 0$ em F para todo $x \in E$.

Prove que a norma $\mathbf{p}$ é equivalente à norma natural de $B(E, F)$.

Questão 5. Seja E um espaço formado. Prove que as dilatações ($x \to \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$) e as translações ($x \to x + c$ para algum $c \in E$) são homeomorfismos na topologia fraca. Conclua que, se E for espaço de Banach reflexivo então a bola

$$B_E(x, R) := \{y \in E : \|y - x\| \leq R\}$$

é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Vale a recíproca?

Questão 6.

a) Seja E um espaço de Banach e seja (x_n) sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$. Definindo $\sigma_n := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, prove que $\sigma_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$.

b) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^k$ um operador linear limitado e $\{e_k\}_{k \geq 1}$ um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Prove que

$$\left\| \frac{Te_1 + \ldots + Te_n}{n} \right\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$